www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE SPECIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE **SESSION 1990**

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION AUX ECOLES SUPERIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MECANIQUE ELECTRICITE
DE TOPOGRAPHIE

DEUXIEME INTERROGATION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

NOTA : Les cinq sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.
Dans la rédaction de leurs copies, les candidats sont priés de bien vouloir encadrer *chacun des résultats correspondants aux éléments* encadrés *dans les énoncés, et ceux-ci seulement.*

SUJET N° 1

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $f_n(x) = x^2 \cos^n x$, $I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx$,

et l'on utilise, sans démonstration, le résultat connu

$$W_{2n} = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{2n}\,dx = \frac{\pi}{2} a_n, \quad \text{avec } a_0 = 1 \text{ et } a_n = \frac{1.3.\ldots.(2n-1)}{2.4.\ldots.(2n)} \text{ si } n \geqslant 1$$

1°) Calculer I_0, I_1 et I_2.

2°) Démontrer l'identité suivante, valable pour tout entier $n \geqslant 1$

$$(2n-1).I_{2n-2} - 2n.I_{2n} = \frac{1}{n}.W_{2n}$$

3°) Donner la valeur de I_{10} sous la forme $\pi.r$ où r est un rationnel écrit sous forme irréductible.

4°) Démontrer que la suite (I_n) tend vers 0.

5°) Montrer que $\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = u_n.I_{2n}$,

où u_n est une suite que l'on déterminera. Quelle conclusion en ressort il ?

SUJET N° 2

1°) Soit $\sum a_n$ une série de terme général $a_n \geqslant 0$, et de sommes partielles $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. On effectue dans $\mathbb{N}^*$ une partition en parties **finies** $P_1, P_2, P_3, \ldots$ non vides. On considère alors la série $\sum b_n$ où $b_n = \sum_{k \in P_n} a_k$, de sommes partielles $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Au moyen de majorations, montrer que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature.

2°) A tout $K \in \mathbb{N}$ on associe un ensemble $U_k \subset \mathbb{N}$

U_k est l'ensemble des nombres entiers x dont l'écriture décimale :

a – comporte k chiffres (donc $10^{k-1} \leqslant x < 10^k$) ,

b – ne comporte pas le chiffre 1 .

Par exemple, 422 appartient à U_3 et 412 n'appartient pas à U_3 .

Calculer $u_k = \text{Card}\,(U_k)$, donc le nombre d'éléments de U_k .

3°) Soit (a_n) la suite telle que $a_n = 0$ si l'écriture décimale de n comporte au moins un chiffre 1, et $a_n = 1/n$ sinon. C'est donc la "*série harmonique sans chiffre 1*", si l'on peut dire... Montrer que cette série converge. (On utilisera les résultats du 1°)).

4°) A tout $K \in \mathbb{N}$ on associe un ensemble $R_k \subset \mathbb{N}$.

R_k est l'ensemble des entiers x dont l'écriture décimale :

a – comporte k chiffres (donc $10^{k-1} \leqslant x < 10^k$) ,

b – ne comporte pas quatre chiffres consécutifs formant le nombre 1789 .

On pose $r_k = \text{Card}\,(R_k)$, donc le nombre d'éléments de R_k .

Calculer r_{10} .

5°) Quelle est la nature de la "série harmonique privée de ses termes 1/n dans lesquels la séquence 1789 apparaît au dénominateur" ?

SUJET N° 3

Pour tout x réel, on pose $f(x) = \exp(-x^2)$.

1°) Montrer que la dérivée d'ordre n de f, notée $f^{(n)}(x)$, est de la forme $f(x).P_n(x)$, où $P_n(x)$ est un certain polynôme.

2°) Quel est le monôme de plus haut degré de ce polynôme $P_n(x)$?

3°) Montrer que $P_n(x)$ "a même parité que n", ce qui signifie donc que
$P_n(x) = \sum_k C(n,k).x^{n-2k}$

4°) Déterminer ces coefficients C(n,k).

5°) Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ possède ses n racines toutes réelles.

SUJET N° 4

On considère la fonction f de la variable réelle x telle que $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}$

1°) Donner sa représentation graphique, et reconnaître la courbe représentative.

2°) Montrer que f satisfait à une équation différentielle du type $A.y' + B.y = 0$, où [A] et [B] sont des polynômes que l'on déterminera.

3°) En supposant que f admet un développement en série entière au voisinage de $x = 0$, soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, donner une [récurrence] exprimant a_n en fonction de a_{n-1} et a_{n-2}.

4°) On pose $b_n = 2^n.n!.a_n$. Montrer que les b_n sont entiers, et en dresser la liste jusqu'à $n = 10$.

5°) Déterminer le rayon de convergence [R] de la série précédente et démontrer que, sur l'intervalle $]-R,R[$, elle coïncide avec f(x).

SUJET N° 5

Soit Δ le domaine carré de $\mathbb{R}^2$ égal à $[0,1]X[0,1]$. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$I_n = \iint_\Delta \frac{(xy)^n dxdy}{1 + xy} .$$

1°) Montrer que la suite (I_n) tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

2°) En partant de l'identité

$$\frac{1}{1 + xy} = \sum_{k=0}^{n-1} (-xy)^k + \frac{(-xy)^n}{1 + xy} \quad , \quad xy + 1 \neq 0,$$

comparer I_0 et la somme S de la série $\sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m^2}$.

3°) Donner la nouvelle forme prise par l'intégrale I_0, soit $\iint_{\Delta_1} F(X,Y)dXdY$ dans les nouveaux axes (OX,OY) qui résultent d'une rotation de $+\pi/4$ des anciens axes (Ox,Oy).
Préciser [F(X,Y)] .

4°) Calculer l'intégrale I_0 et en déduire la valeur de S .

———— o o O o o ————

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail